Lineer Cebir

- **Dersi Veren.** Öğr. Gör. Dr. Emine Çelik
- **Ofis.** #308
- **Eposta.** eminecelik@sakarya.edu.tr
- **Web Adresi.** http://eminecelik.sakarya.edu.tr/tr/duyuru/goruntule/liste

- **Ders Kaynaklari.**
  - Lineer Cebir, A.Sabuncuoğlu, Nobel Yayınları, Ankara, 2004.
  - Ders Notu.

Determinant

2×2 bir lineer denklem sistemi $A\vec{x} = \vec{b}$ olarak asagidaki sistemi göz önüne alalım.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases} \iff A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Kabul edelim ki, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ öyle sayilar olsun ki sistemin tek cozumu olsun.

O halde,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \\ \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} b_1a_{22}-b_2a_{12} \\ b_2a_{11}-b_1a_{21} \end{bmatrix}$$

x_1 ve x_2 cozumlerinin paydalarına baktigimizda, sadece ve sadece A nin elemanlarina bagli oldugunu goruruz. Dahası, x_1 ve x_2 nin paydaları aynidir!

Bu verilen bir $n \times n$ lineer denklem sisteminin tek cozumu oldugunda gorulur. Ve bu payda $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ Lineer Cebir de sık karsımıza çıkar.

Tanim 1 *(Bir kare matrisin determinanti) $A\vec{x} = \vec{b}$ lineer sistemi kare bir sistem olsun ve tek cozumu olsun. Iste bu tek cozumun paydasına A matrisinin determinantı denir. Kare olmayan matrisin determinantı tanimsizdir.*

Determinantı bulmak icin kare lineer denklem sistemini çözmek çok islem gerektirir ve sonunda da ortak paydayı tespit etmek zordur. $n \times n$ matrisler icin determinantı bulmanın daha kolay bir yolu vardır.

2×2 matrislerin determinantini bulmak:

Proposition 2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *matrisi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ verilsin. A nin determinanti asagidaki gibi tanimlidir:*

$$|A| = \det(A) = ad - bc$$

Alternatif gösterim: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ gösterimi de determinant icin kullanılır. (mutlak deger degildir!)

Ornek.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = -2$$

Tanim 3 *A bir $n \times n$ kare matris olsun. O zaman*

- *A nin M_{ij} ile gösterilen $(i,j)-$ **minoru**, A dan i. satiri ve j. sutunu çıkararak elde edilen matrisin determinantina denir.*
- *A nin C_{ij} ile gösterilen $(i,j)-$ **kofaktoru**: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ dir.*

Ornegin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

matrisini goz onune alalim. O halde A nin $(1,1)-$minoru ve kofaktoru:

$$C_{11} = (-1)^2 M_{11} = (-1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$$

A nin $(1,2)-$minoru ve kofaktoru:

$$C_{12} = (-1)^3 M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

A nin $(1,3)-$minoru ve kofaktoru:

$$C_{13} = (-1)^4 M_{13} = (1) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

A nin $(2,1)-$minoru ve kofaktoru:

$$C_{21} = (-1)^3 M_{21} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

A nin $(2,2)-$minoru ve kofaktoru:

$$C_{22} = (-1)^4 M_{22} = (1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$$

A nin $(2,3)-$minoru ve kofaktoru:

$$C_{23} = (-1)^5 M_{23} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

A nin $(3,1)-$minoru ve kofaktoru:

$$C_{31} = (-1)^4 M_{31} = (1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$$

A nin $(3,2)-$minoru ve kofaktoru:

$$C_{32} = (-1)^5 M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

A nin $(3,3)-$minoru ve kofaktoru:

$$C_{33} = (-1)^6 M_{33} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

Teorem 4 *A bir $n \times n$ kare matris olsun. O zaman*

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \ \ i.\ satir\ acilimi$$

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \ \ j.\ sutun\ acilimi$$

Ornek.

Verilen matrisin determinantini hesaplayalim. $A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

$$\begin{aligned} |A| &= (\mathbf{0})C_{11} + (\mathbf{2})C_{12} + (\mathbf{1})C_{13} \\ &= (-1)^{1+1}(0)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (-2)\left[(4)(2) - (3)(1)\right] + (1)\left[(4)(1) - (3)(1)\right] \\ &= \boxed{-9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (\mathbf{0})C_{11} + (\mathbf{4})C_{21} + (\mathbf{1})C_{31} \\ &= (-1)^{1+1}(0)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(4)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (-4)\left[(2)(2) - (1)(1)\right] + (1)\left[(2)(3) - (1)(3)\right] \\ &= \boxed{-9} \end{aligned}$$

Tanim 5 *Seyrek matris en az birkaç sifiri olan matristir.*

Ornegin, elementer matrisler, üçgen matrisler seyrek matrislerdir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanim 6 *Yogun matris en fazla bir kaç sifiri olan matristir.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seyrek matrisin determinantı:

Kofaktor acilimi seyrek matrisler icin etkili bir yöntemdir ve bunu uygularken en çok sifir içeren satıra veya sutuna gore acilimi yapınız.

Verilen matrisin determinantini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (0)C_{31} + (0)C_{32} + (0)C_{33} + (8)C_{34} \\ &= (-1)^{3+4}(8) \begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= (-8)\left[0 + (6)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\right] \\ &= (-8)(6)\left[(-2)(-3) - (5)(1)\right] \\ &= \boxed{-48} \end{aligned}$$

Kofaktor acilimi bir $n \times n$ yogun matris icin $(n \geqslant 4)$ çok islem gerektirir. Yogun matrisler icin daha iyi bir metodu ileride göreceğiz.

Üçgen matrisin Determinanti:

Teorem 7 *A bir* $n \times n$ *üçgen matris olsun. O zaman,* $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$*' dir. Yani, bir üçgen matrisin determinantı asal köşegen elemanlarının carpimidir.*

Verilen matrisin determinantini hesaplayalim. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = (1)(-3)(5)(-1) = \boxed{15}$$

Ispat: A nin bir üst üçgen matris oldugunu kabul edelim.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ilk sutuna gore açarak determinantini hesaplayalım.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}\cdots & a_{2n} & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}detA_{11} = a_{11}det\begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

A_{11} matrisi de yine bir üst üçgen matris. Ayni sekilde devam edersek,

$$|A| = a_{11}a_{22}det\begin{bmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Bu islemlere 2×2 alt matrisi elde edene kadar devam edelim öyle ki

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2,n-2}det\begin{bmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{nn} \end{bmatrix}. \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

Köşegen matris ayni zamanda bir üst üçgen matris olduğu icin ayni sonuc köşegen matris icin de geçerlidir.

Eğer A matrisi bir alt üçgen matris ise ispatı benzerdir. Burada, yalnız ilk satıra gore açarak determinant hesaplanır. ■

Teorem 8 *A bir* $n \times n$ *kare matris olsun.*

1. *Bir determinantta herhangi bir satir (ya da sutun) elemanlarının hepsi* 0 *ise determinantin degeri* 0*dir.*
2. *Bir determinantin herhangi iki satiri (ya da sutunu) birbirine eşitse determinantin degeri* 0 *dir.*
3. *Bir determinantin herhangi iki satir (ya da sutun) elemanları karsilikli olarak orantılı ise determinantin degeri* 0 *dir.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{0} \\ 4 & 5 & \mathbf{0} \\ 7 & 8 & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ 4 & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ 7 & \mathbf{8} & \mathbf{8} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{2} & \mathbf{10} \\ 4 & \mathbf{5} & \mathbf{25} \\ 7 & \mathbf{8} & \mathbf{40} \end{vmatrix} = 0$$

Elementer satir islemleri ve determinant:

Teorem 9 *A ve B, $n \times n$ kare matrisler olsun.*

(i) Eger $A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} B$, *o zaman* $det(B) = -det(A)$.

(ii) Eger $A \xrightarrow{\alpha R_j \to R_j} B$, *o zaman* $det(B) = \alpha det(A)$.

(iii) Eger $A \xrightarrow{\alpha R_i + R_j \leftrightarrow R_j} B$, *o zaman* $det(B) = det(A)$.

Teorem 10 *A ve B, $n \times n$ kare matrisler olsun.*

(i) Eger $A \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} B$, *o zaman* $det(B) = -det(A)$.

(ii) Eger $A \xrightarrow{\alpha C_j \to C_j} B$, *o zaman* $det(B) = \alpha det(A)$.

(iii) Eger $A \xrightarrow{\alpha C_i + C_j \leftrightarrow R_j} B$, *o zaman* $det(B) = det(A)$.

Ornek.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{(4)R_2 \to R_2} \left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 16 & 20 & 24 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-3)R_1 + R_3 \to R_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{(4)C_2 \to C_2} \left(\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 4 & 20 & 6 \\ 7 & 32 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-3)C_1 + C_3 \to C_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -12 \end{vmatrix}$$

Ornek.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Ornek.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ornek.

$A = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 14 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantini bulunuz.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 14 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} \\ &= 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} \\ &= 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$|A| = 7(1)(1)(-2) = -14.$$

Ornek.

$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantini bulunuz.

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -3(1)(-1) = 3.$$

Matrislerin Carpiminin ve Transpozesinin Determinanti

Ornek. A ve B, $n \times n$ kare matrisler olsun. AB terslenebilir bir matris ise, A da terslenebilir bir matristir ve tersi $B(AB)^{-1}$' dir.

Çozum.

AB terslenebilir bir matris olsun. Eger $B(AB)^{-1} \cdot A = A \cdot B(AB)^{-1} = I$ ise A terslenebilirdir.

$$B(AB)^{-1}A = BB^{-1}A^{-1}A = I$$
$$AB(AB)^{-1} = ABB^{-1}A^{-1} = I$$

Teorem 11 *A, B $n \times n$ kare matrisler ve $\alpha \neq 0$ olsun.*

(1) $|AB| = |A||B|$

(2) $|\alpha A| = \alpha^n |A|$

(3) $|A^T| = |A|$

- 2. madde asagidaki durumlar icin determinant hesaplarken kullanislidir:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -240 & 360 & 0 \\ 600 & 120 & -120 \\ 0 & 960 & 720 \end{vmatrix} = (120)^3 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1/4 & -1/3 & 1/2 \\ -5/6 & 2/3 & 0 \\ 3/2 & 0 & -3/4 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{12}\right)^3 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -10 & 8 & 0 \\ 18 & 0 & -9 \end{vmatrix}$$

Ornek.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 40 \\ 30 & 0 & 50 \\ -20 & -30 & 10 \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantini bulunuz.

$$A = 10\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$|A| = 10^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1000(5) = 5000.$$

Sonuc 12 *$A_1, A_2, \cdots, A_k$ $n \times n$ kare matrisler olsun.*

$$|A_1 \cdot A_2 \cdots A_k| = |A_1||A_2| \cdots |A_n|$$

Sonuc 13 *A, $n \times n$ kare matris ve $k \geqslant 2$ pozitif tamsayi olsun.*

$$|A^k| = |A|^k$$

Teorem 14 *Bir A kare matrisi terslenebilirdir $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$*

PROOF:

$(\Rightarrow)$: *A terslenebilir bir matris olsun. O zaman,*

$$\begin{array}{rc} & A^{-1}A = I \\ \Longrightarrow & |A^{-1}A| = |I| \\ \Longrightarrow & |A^{-1}||A| = |I| \\ \Longrightarrow & |A^{-1}||A| = 1 \\ \Longrightarrow & |A^{-1}| \neq 0 \text{ and } |A| \neq 0 \end{array}$$

$(\Leftarrow)$: $|A| \neq 0$ *ise* $A \xrightarrow{Gauss-Jordan} I$ *Cunku* $|I| \neq 0$

$$\Longrightarrow [A|I] \xrightarrow{Gauss-Jordan} [I|A^{-1}] \Longrightarrow A^{-1} \text{ vardir.} \Longrightarrow A \text{ terslenebilir.}$$

Ornek.

Asagidaki her bir matrisin terslenebilir olup olmadigini belirleyiniz.

a. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

Teorem 15 *A matrisi $n \times n$ terslenebilir matris olsun. O halde*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

PROOF: *A terslenebilir olsun. O zaman,* $|A| \neq 0$ *ve*

$$\begin{aligned} & A^{-1}A = I \\ \Longrightarrow \quad & |A^{-1}A| = |I| \\ \Longrightarrow \quad & |A^{-1}||A| = |I| \\ \Longrightarrow \quad & |A^{-1}||A| = 1 \\ \Longrightarrow \quad & |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \end{aligned}$$

Uyari!

Genelde $|A+B| \neq |A| + |B|$ *ve* $|A-B| \neq |A| - |B|$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = -2 \text{ ve } |B| = 32$$

O zaman $A + B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ *ve* $A - B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow |A+B| = 53 \neq -2 + 32 = |A| + |B|$$
$$\Longrightarrow |A-B| = 7 \neq -2 - 32 = |A| - |B|$$

Ornek.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $|A^{-1}|$' i bulunuz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Buradan, $|A^{-1}| = 1/|A|$ *formulunden* $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$.

Teorem 16 *A bir $n \times n$ kare matris olsun. Asagidakiler eşittir!*

(1) A terselenebilir bir matristir.

(2) $A\vec{x} = \vec{b}$ sadece tek bir cozume sahiptir!

(3) $A\vec{x} = \vec{0}$ sadece aşikar cozum $\vec{x} = 0$ a sahiptir! $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots$.

(4) A matrisi I matrisine satırca denktir!

(5) A matrisi elementer matrislerin carpimi olarak yazılabilir.

(6) $|A| \neq 0$

Ornek. Asagidaki sistemlerden hangisi tek cozume sahiptir?

a.
$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Iki sistemin de katsayilar matrisinin determinantina bakiyoruz.

Determinanti sifirdan farkli olan sistem tek cozume sahiptir.

a. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

b. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$