
T.C. Sakarya Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
Worksheet I

1. Aşağıdaki fonksiyonların, verilen kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri olup olmadığını gösteriniz:

(a) Fonksiyon:

$$u(x, y) = e^{x^2 - y^2}$$

Kısmi diferansiyel denklem:

$$u_{xx} - u_{yy} = 4(x^2 - y^2)u$$

(b) Fonksiyon:

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Kısmi diferansiyel denklem:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{4}{x^2 + y^2}$$

(c) Fonksiyon:

$$u(x, y) = x^2y + y^3$$

Kısmi diferansiyel denklem:

$$u_{xxy} - 2u_{yy} = 6y$$

2. Aşağıdaki denklemleri, mertebesi, derecesi, lineerliği, yarı-lineerliği, hemen-hemen lineerliği ve homojenliği açısından sınıflandırınız:

(a)

$$z_{xxx} + z_{yyy} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = x^2 + y^2$$

(b)

$$z_{xx} \cdot z_{yy} - \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 + \sin \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

(c)

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot z_{yy} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^3 = e^{x^2 + y^2}$$

(d)

$$z_{xxxx} + 2z_{xx}z_{yy} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x + y)$$

(e)

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \right)^2 + z_{yyy} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = z^2$$

(f)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \sin(z_{xx}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + z$$

(g)

$$z_{xxxx} + \cos\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + z_{yy} = x^2 - y^2$$

(h)

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + z_{xxyy} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = z \cdot \sin(x)$$

(i)

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + (z_{xx})^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z^3$$

(j)

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \cdot \ln(z) + z_{xx} = y^3$$

3. Muhtemelen çözülmesi en kolay olan tüm kısmi diferansiyel denklemlerden biri şudur:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0$$

Bu denklemi çözebilir misiniz? Bu denklemi sağlayan tüm $u(x, y)$ fonksiyonlarını bulunuz.

4. Eğer $u_1(x, y)$ ve $u_2(x, y)$,

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

kısmi diferansiyel denkleminin çözümleri ise, bu iki fonksiyonun toplamı da bu denklemi sağlar mı? Kanıtlayınız.

5. Aşağıdaki fonksiyon ailelerinin kısmi diferansiyel denklemlerini bulunuz.

(a) $z = (x + a)(y + b)$

(b) $z = ax + by$

(c) $2z = (ax + y)^2 + b$

(d) $z^2(1 + a^3) = 8(x + ay + b)^3$

6. Aşağıdaki fonksiyon ailelerinin kısmi diferansiyel denklemlerini bulunuz.

(a) $F(z - xy, x^2 + y^2) = 0$

(b) $F(xy, x + y - z) = 0$

(c) $z = f\left(\frac{xy}{z}\right)$

(d) $F(x + y, x - \sqrt{z}) = 0$

(e) $F\left(\frac{xy}{z}, \frac{x-y}{z}\right) = 0$

(f) $F(xyz, x + y + z) = 0$

(g) $z = x + y + f(xy)$