T.C. Sakarya Üniversitesi Fen Fakültesi – Matematik Bölümü

Kesirli Diferansiyel Denklemler

Worksheet I

1. İntegral gösterimlerini doğrulayınız

Her integralde uygun değişken dönüşümünü seçiniz. Yeni değişkeni, diferansiyelini ve integral sınırlarının nasıl değiştiğini ayrı ayrı yazınız.

1. $s > 0$ ve $x > 0$ için aşağıdaki eşitliği gösteriniz.

$$\Gamma(x) = s^x \int_0^\infty e^{-st} t^{x-1}\, dt.$$

İpucu: $u = st$ seçiniz.

2. $x > 0$ için aşağıdaki eşitliği doğrulayınız.

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(xt - e^t)\, dt.$$

İpucu: $u = e^t$ seçiniz. Sınırları da dönüştürünüz: $t \to -\infty$ iken $u \to 0$, $t \to \infty$ iken $u \to \infty$.

3. Tam kareye tamamlama yaparak integrali hesaplayınız.

$$\int_a^\infty e^{2ax - x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{a^2}.$$

İpucu: $2ax - x^2 = -(x-a)^2 + a^2$ ve $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}/2$.

2. Beta ve Gamma fonksiyonlarıyla integralleri hesaplayınız

Önce integrali Beta fonksiyonunun tanımına benzetiniz. Gerekirse değişken dönüşümü yapınız; ardından Beta–Gamma bağıntısını ve Gamma yineleme formülünü kullanınız.

1. Aşağıdaki integrali Beta fonksiyonu cinsinden yazıp değerini bulunuz.

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, dx.$$

2. $x = u^2$ dönüşümünü kullanarak integrali hesaplayınız.

$$\int_0^1 x^4 (1 - x^2)^{-1/2}\, dx.$$

3. $t = \dfrac{x^3}{1+x^3}$ dönüşümüyle integrali Beta fonksiyonuna dönüştürünüz ve hesaplayınız.

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^3)^2}\, dx.$$

4. $x = 2t - 1$ dönüşümünü kullanarak integrali hesaplayınız.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$$

5. Gamma integralinde $u = 3x$ dönüşümünü kullanarak aşağıdaki integrali hesaplayınız.

$$\int_0^\infty x^2 e^{-3x}\, dx.$$

6. Beta fonksiyonuna dönüştürüp sonucu Gamma değerleriyle ifade ediniz:

$$\int_0^1 x^{2/3} (1-x)^{1/2}\, dx.$$

3. Mittag–Leffler fonksiyonları

Aşağıdaki sorularda tanımları doğrudan kullanınız. Her iki tarafı kuvvet serisi biçiminde yazıp aynı kuvvetlerin katsayılarını karşılaştırınız. İlk iki soruda serileri çift ve tek kuvvetli terimlerine ayırmak işe yarar.

Hatırlatma. $\alpha > 0$, ayrıca iki parametreli fonksiyon için $\beta > 0$:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

1. Mittag–Leffler tanımını kullanarak $E_2(-z^2) = \cos z$ eşitliğini gösteriniz.

$$E_2(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)}.$$

2. Serileri çift ve tek kuvvetli terimlerine ayırarak aşağıdaki özdeşliği kanıtlayınız ($\alpha > 0$).

$$E_\alpha(-z) = E_{2\alpha}(z^2) - z E_{2\alpha,1+\alpha}(z^2).$$

3. $E_{\alpha,\beta}(z)$ serisini terim terim türeterek aşağıdaki bağıntıyı gösteriniz ($\alpha > 0,\ \beta > 1,\ z \neq 0$). $z = 0$ için eşitliği limit yoluyla yorumlayınız.

$$\frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta - 1) E_{\alpha,\beta}(z)}{\alpha z}.$$

4. $E_{1,2}(z)$ serisini açınız ve sonucu $(e^z - 1)/z$ biçiminde yazınız. $z = 0$ noktasındaki değeri seriden bulunuz.

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)}.$$

5. Seriler üzerinden $E_{2,1}(z^2) = \cosh z$ olduğunu gösteriniz.

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}.$$

4. Mittag–Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü

Hatırlatma: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ ve $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} t^{\nu-1}\,dt = \frac{\Gamma(\nu)}{s^\nu}$ $(s > 0,\ \nu > 0)$.

1. $\alpha, \beta > 0$ için kuvvet serisi tanımından başlayarak aşağıdaki Laplace dönüşümünü elde ediniz. Geometrik serinin yakınsaklık koşulunu da belirtiniz.

$$\mathcal{L}\left\{ t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) \right\}(s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \qquad |\lambda| < s^\alpha.$$

2. Önceki sorudaki bağıntıda $\alpha = \beta = 1$ seçiniz. $E_{1,1}(z) = e^z$ olduğunu seriden doğrulayınız ve $\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s)$ dönüşümünü bulunuz. Sonucu doğrudan integral alarak da kontrol ediniz.