Lineer Cebir

- **Dersi Veren.** Öğr. Gör. Dr. Emine Çelik
- **Ofis.** #308
- **Eposta.** eminecelik@sakarya.edu.tr
- **Web Adresi.** http://eminecelik.sakarya.edu.tr/tr/duyuru/goruntule/liste

- **Ders Kaynaklari.**
  - Lineer Cebir, A.Sabuncuoğlu, Nobel Yayınları, Ankara, 2004.
  - Ders Notu.

1 Lineer Sistemler Teorisi

Teorem 1 *Her $A\vec{x} = \vec{b}$ lineer denklemler sistemi ya cozume sahip degil ya tam olarak tek bir cozume sahip ya da sonsuz cozume sahiptir.*

Tanim 2 *$A\vec{x} = \vec{b}$ sistemine eger $\vec{b} = \vec{0}$ ise **homojendir** denir; eger $\vec{b} \neq \vec{0}$ ise **homojen degildir** denir.*

Teorem 3 *$A\vec{x} = \vec{0}$ homojen sistemi ya tek cozume ya da sonsuz cozume sahiptir.*

Tanim 4 *Bir A matrisinin ranki A nin satirca indirgenmis eselon formundaki sifir olmayan satirlarin sayisina esittir. (Yani bir A matrisinin ranki A nin satirca indirgenmis eselon formundaki pivot sayisina esittir.)*

Teorem 5 *A bir $m \times n$ matris olmak uzere $A\vec{x} = \vec{b}$ sistemi icin $rankA = p$ ve $rank[A|\vec{b}] = q$ olsun. Bu durumda $A\vec{x} = \vec{b}$ sistemi*

(i) $p < q$ ise cozume sahip degil.

(ii) $p = q = n$ ise tek cozume sahip

(iii) $p = q$ ve $p < n$ ise sonsuz cozume sahiptir.

$A\vec{x} = \vec{b}$ Kare sistemi Cozmek: Ters Matris

Motivasyon: $ax = b$ seklindeki lineer skaler denklemi cozme:

Eğer $a \neq 0$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} ax &= b \\ a^{-1}ax &= a^{-1}b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ (1)x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b. \end{aligned}$$

Burada $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, a nin carpmaya gore ters elemanidir.

Eger $a = 0$ ise, o zaman

$$ax = b \Rightarrow (0)x = b \Rightarrow 0 = b \Rightarrow \begin{cases} \text{sonsuz cozum, eger} & b = 0 \\ \text{cozum yok, eger} & b \neq 0 \end{cases}$$

Soru: $A\vec{x} = \vec{b}$ sistemini çözmek icin A nin ters matrisi var midir?

Cevap: Eger lineer sistem kare (square) ise, o zaman belki!

Tanim 6 *A bir $n \times n$ kare matris ve I bir $n \times n$ birim matris olsun. Eger $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ esitligini saglayan bir $n \times n$ kare matrisi A^{-1} varsa, o zaman A **terslenebilir** denir. A^{-1} matrisine de A nin **tersi** denir. Eger A nin bir ters matrisi yoksa o zaman A ya **singulerdir (terslenemez)** denir.*

Kare olmayan matrislerin tersi yoktur!

Teorem 7 *(Ters Matrisin Tekligi) Eger bir $n \times n$ kare matris A terslenebilir ise, o halde A nin tersi A^{-1} tektir!*

Bir matrisin tersini Gauss-Jordan Yoketme ile Bulma:

Soru: Bir matrisin tersini (eger varsa) nasil bulacagiz?

Cevap: Gauss-Jordan yoketme metodunu asagidaki gibi kullanarak:

(1) Verilen bir $n \times n$ kare matrisi A icin:

(2) Amac: A^{-1} i varsa bul. Aksi takdirde A singulerdir.

(3) $[A|I]$ genisletilmis matrisini olustur.

(4) Gauss Jordan i uygula.

Eger satirca indirgenmis eselon form$\neq I$, o zaman A singulerdir.

Eger satirca indirgenmis eselon form$= I$, o halde $[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$.

Saglama yapmak icin: $AA^{-1} = AA^{-1} = I$, oldugunu gor!

Sonuc 8 *(bir 2×2 matrisin tersi) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 2×2 bir matris olsun ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun. Ozaman*

$$\text{if } ad - bc \neq 0, \text{ o zaman } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$$\text{if } ad - bc \neq 0, \text{ o zaman } A \text{ singulerdir.}$$

Ispat: $[A|I]$ ya Gauss-Jordan yoketme metodunu uygula. ■

Ters matrislerin ozellikleri

Teorem 9 *A ve B, $n \times n$ terslenebilir matrisler, k pozitif tamsayi ve α sifirdan farkli bir reel sayi olsun. O halde, $A^{-1}, A^k, \alpha A, A^T, AB$ matrisleri de terselenebilirdir ve asagidakiler dogrudur:*

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

(3) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Lineer Sistemleri Cozmek icin Ters Metodu

$A\vec{x} = \vec{b}$ lineer sistemini cozmek icin, A^{-1} i nasil kullaniriz?

Teorem 10 *(Tek Cozumlu Kare Lineer Sistemler) A bir terslenebilir matris olsun. O zaman $A\vec{x} = \vec{b}$ kare lineer sistemi $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ seklinde yazilabilen tek bir cozume sahiptir.*

Teorem 11 *A bir $n \times n$ matris olmak uzere asagidakiler denktir.*

(i) A terslenebilirdir.

(ii) $A\vec{x} = \vec{b}$ sistemi her $\vec{b}$ icin tek cozume sahiptir.

(iii) $A\vec{x} = \vec{0}$ homojen sistemi sadece asikar cozume sahiptir.

(iv) $rankA = n$ dir

(v) A nin satirca indirgenmis eselon formu I birim matrisidir.